

# 3

## EL MÉTODO DE LAS DEFORMACIONES

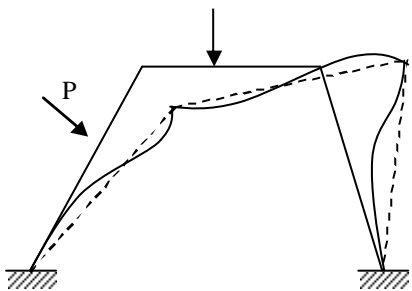
### 3.1- CONSIDERACIONES GENERALES.

Las estructuras sufren en general al estar sometidas a un estado de solicitaciones, un estado de deformaciones, como consecuencia de un estado de cargas.

Así las distintas partes que conforman la estructura tendrán en general traslaciones y rotaciones que conformaran el estado de deformación de la estructura, dependiendo el mismo del tipo de estructura, sus características geométricas y elásticas y del estado de cargas.

Veamos que sucede con un pórtico plano sometido a esfuerzos normales, de corte y momentos flectores a fin de plantear su resolución por el Método de las Deformaciones.

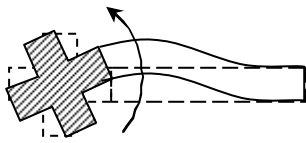
A cada estado de deformación corresponde un estado de solicitación, por lo cual a partir de aquellas podemos calcular estas últimas.



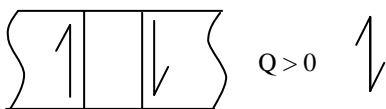
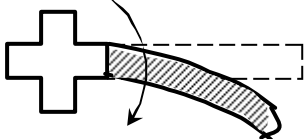
Llamaremos ahora la atención sobre consideraciones que debemos tener en cuenta para la aplicación del método que desarrollaremos, en el cual estudiaremos que ocurre con una barra genérica que forma parte de la estructura, definiendo características y convenciones de signos a utilizar. Con referencia a estos últimos no existe unanimidad; en el curso trataremos de utilizar convenciones generales que luego adaptaremos a los distintos casos.

### 3.2- CONVENCION DE SIGNOS DE SOLICITACIONES Y DEFORMACIONES

$M > 0$  Acción de NUDO sobre la BARRA



$M > 0$  Acción de la BARRA sobre el NUDO



Utilizaremos las siguientes convenciones de signos:

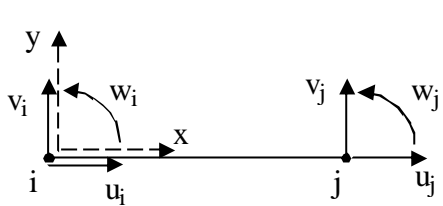
a) Los momentos de acción y reacción entre el extremo de la barra y el nudo se consideran positivos cuando la acción del NUDO sobre la BARRA tienda a girarla en sentido contrario a las agujas del reloj, o lo que es lo mismo, cuando la acción de la BARRA sobre el NUDO tiende a que este gire en el sentido de las agujas del reloj. Es inmediato por el principio de acción y reacción que las dos figuras representan el mismo fenómeno, que produce tracción en las fibras superiores de la barra al llegar al nudo de la figura.

b) El esfuerzo de corte  $Q$  se considerará positivo cuando en una sección dada, la acción de la izquierda sobre la derecha tenga sentido hacia arriba.

c) El esfuerzo normal  $N$  se considerará positivo en el caso de tracción.

d) Desplazamientos y fuerzas

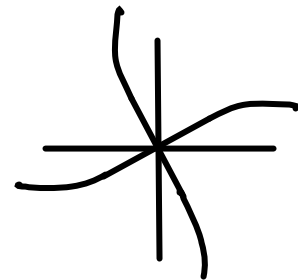
Respecto a los desplazamientos  $u, v, w$  en una barra sobre la cual aplicamos un par de ejes locales  $x, y$ , como se indican en la figura, se adoptan como positivos los señalados en la misma



- $u > 0$  Desplazamiento en la dirección y sentido del eje  $x$ .
- $v > 0$  Desplazamiento en la dirección y sentido del eje  $y$ .
- $w > 0$  Rotación en sentido contrario a las agujas del reloj

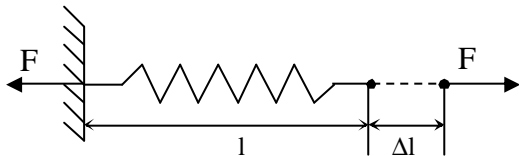
Las acciones  $F_x, F_y, M$  en los extremos de las barras serán también positivas cuando coincidan con el sentido positivo de  $u, v, w$ .

- e) Por último se considerará que la rotación del nudo  $w_i$  es igual a la rotación  $w_{ij}$  del extremo de las barras que concurren al mismo. ( $w_i = w_{ij}$ )



**3.3- LA BARRA RECTA**

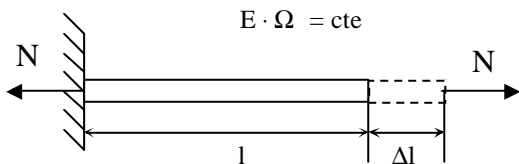
Antes de analizar una barra sometida a varios efectos y sollicitaciones estudiaremos el caso más simple de un resorte como el de la figura, cargado con una fuerza  $F$  que produce un desplazamiento  $\Delta l$  tal que:



$$\Delta l = \delta \cdot F \quad \text{y} \quad F = k \cdot \Delta l$$

con  $k = \delta^{-1}$

- $\delta$  = Coeficiente de flexibilidad = valor de  $\Delta l$  para un  $F = 1$
- $k$  = Coeficiente de rigidez = Valor de  $F$  para un  $\Delta l = 1$



En caso de una barra de sección constante traccionada, por la ley de Hooke es inmediato:

$$\Delta l = \frac{1}{E\Omega} \cdot N \quad \text{con} \quad \delta = \frac{1}{E\Omega}$$

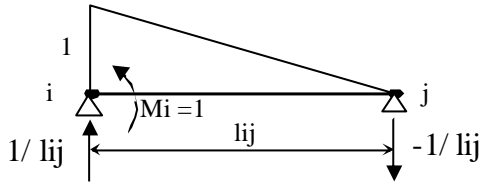
$$N = \frac{E\Omega}{l} \cdot \Delta l \quad \text{con} \quad k = \frac{E\Omega}{l}$$

**3.3.1- LA BARRA ARTICULADA-ARTICULADA CON ACCIONES EN LOS NUDOS**

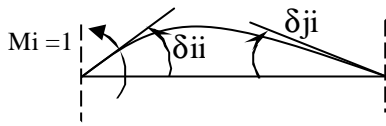
Analicemos una barra  $ij$  a la cual se le aplican por sus extremos o nudos un estado de desplazamientos  $u, v, w$  asociado a fuerzas o sollicitaciones  $F_x, F_y, M$ .

a) Rotaciones  $w_i ; w_j$

Aplicamos  $M_i = 1$  y aparecerán rotaciones  $\delta_{ii}$  y  $\delta_{ji}$  que se pueden calcular por el P.T.V. o por Mohr y que según vimos en (1-5) representan:

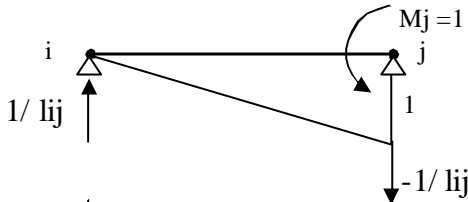


$\delta_{ii}$  = rotación en i para  $M_i = 1$



$\delta_{ji}$  = rotación en j para  $M_i = 1$

Además aparecen reacciones en un sentido **y**, iguales a  $1/lij$  y  $-1/lij$

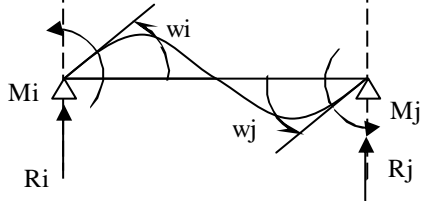


Con el mismo procedimiento, si aplicamos en j un  $M_j = 1$  aparecerán rotaciones y reacciones:

$\delta_{ij}$ ;  $\delta_{jj}$

y

$1/lij$ ;  $-1/lij$



Por superposición de efectos al aplicar momentos  $M_i$ ;  $M_j$  aparecerán en los extremos rotaciones  $w_i$ ;  $w_j$  y reacciones  $R_i$ ;  $R_j$ :

$$w_i = \delta_{ii} \cdot M_i + \delta_{ij} \cdot M_j$$

$$w_j = \delta_{ji} \cdot M_i + \delta_{jj} \cdot M_j \quad \text{con } \delta_{ij} = \delta_{ji}$$

$$R_i = \left( \frac{M_i + M_j}{lij} \right)$$

$$R_j = - \left( \frac{M_i + M_j}{lij} \right)$$

De estas últimas ecuaciones podemos explicitar  $M_i$   $M_j$  en función de  $w_i$   $w_j$ , donde denominando con  $|\delta_{ij}|$  al determinante de los coeficientes:

$$|\delta_{ij}| = \delta_{ii} \cdot \delta_{jj} - \delta_{ij} \cdot \delta_{ji} = \delta_{ii} \cdot \delta_{jj} - \delta_{ij}^2$$

obtendremos:

$$M_i = \frac{\delta_{jj}}{|\delta_{ij}|} w_i - \frac{\delta_{ij}}{|\delta_{ij}|} w_j$$

$$M_j = - \frac{\delta_{ji}}{|\delta_{ij}|} w_i + \frac{\delta_{ii}}{|\delta_{ij}|} w_j$$

$$R_i = \frac{(\delta_{jj} - \delta_{ji})}{|\delta_{ij}|} \cdot \frac{w_i}{lij} + \frac{(\delta_{ii} - \delta_{ij})}{|\delta_{ij}|} \cdot \frac{w_j}{lij}$$

$$R_j = - \frac{(\delta_{jj} - \delta_{ji})}{|\delta_{ij}|} \cdot \frac{w_i}{lij} - \frac{(\delta_{ii} - \delta_{ij})}{|\delta_{ij}|} \cdot \frac{w_j}{lij}$$

Con los coeficientes:

$$k_{ii} = \frac{\delta_{jj}}{|\delta_{ij}|} \quad ; \quad k_{ij} = -\frac{\delta_{ij}}{|\delta_{ij}|} \quad ; \quad k_{ji} = -\frac{\delta_{ji}}{|\delta_{ij}|} \quad k_{jj} = \frac{\delta_{ii}}{|\delta_{ij}|}$$

obtendremos:

$$M_i = k_{ii} \cdot w_i + k_{ij} \cdot w_j$$

$$M_j = k_{ji} \cdot w_i + k_{jj} \cdot w_j$$

$$R_i = (k_{ii} + k_{ji}) \cdot \frac{w_i}{l_{ij}} + (k_{ij} + k_{jj}) \cdot \frac{w_j}{l_{ij}}$$

$$R_j = -(k_{ii} + k_{ji}) \cdot \frac{w_i}{l_{ij}} - (k_{ij} + k_{jj}) \cdot \frac{w_j}{l_{ij}}$$

dónde los "Coeficientes de Rigidez" k representan:

$k_{ii}$  = momento  $M_i$  para  $w_i = 1$  y  $w_j = 0$

$k_{ij}$  = momento  $M_i$  para  $w_i = 0$  y  $w_j = 1$

$k_{ji}$  = momento  $M_j$  para  $w_i = 1$  y  $w_j = 0$

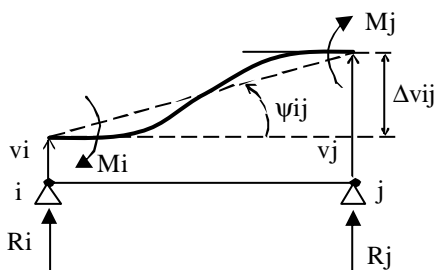
$k_{jj}$  = momento  $M_j$  para  $w_i = 0$  y  $w_j = 1$

### b) Desplazamientos $v_i$ ; $v_j$ según eje y

Aplicamos desplazamientos  $v_i$ ;  $v_j$  tales que:

$$\Delta v_{ij} = v_j - v_i \quad \psi_{ij} = \frac{\Delta v_{ij}}{l_{ij}} = \frac{v_j - v_i}{l_{ij}} \quad \text{siendo además } w_i = w_j = 0$$

Aparecerán solicitaciones  $M_i$   $M_j$   $R_i$   $R_j$  cuyos valores obtendremos de una viga similar a la anterior con rotaciones  $w_i^*$ ;  $w_j^*$  tales que:



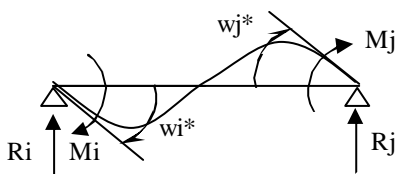
$$w_i^* = w_j^* = -\psi_{ij} = -\frac{\Delta v_{ij}}{l_{ij}} = -\frac{v_j - v_i}{l_{ij}}$$

Se cumplirá entonces:

$$M_i = \frac{\delta_{jj}}{|\delta_{ij}|} \cdot w_i^* - \frac{\delta_{ij}}{|\delta_{ij}|} \cdot w_j^* = k_{ii} \cdot w_i^* + k_{ij} \cdot w_j^*$$

y por lo tanto:

$$M_i = -(k_{ii} + k_{ij}) \cdot \frac{\Delta v_{ij}}{l_{ij}} = -(k_{ii} + k_{ij}) \cdot \frac{v_j - v_i}{l_{ij}}$$



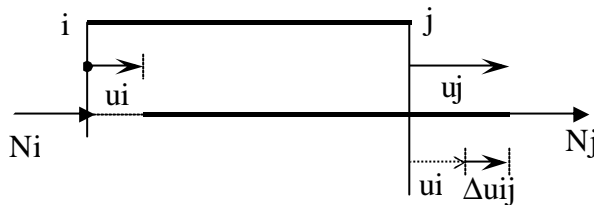
análogamente

$$M_j = -(k_{ji} + k_{jj}) \cdot \frac{\Delta v_{ij}}{l_{ij}} = -(k_{ji} + k_{jj}) \cdot \frac{v_j - v_i}{l_{ij}}$$

$$R_i = -(k_{ii} + k_{jj} + 2k_{ij}) \cdot \frac{\Delta v_{ij}}{l_{ij}^2} = -(k_{ii} + k_{jj} + 2k_{ij}) \cdot \frac{v_j - v_i}{l_{ij}^2}$$

$$R_j = (k_{ii} + k_{jj} + 2k_{ij}) \cdot \frac{\Delta v_{ij}}{l_{ij}^2} = (k_{ii} + k_{jj} + 2k_{ij}) \cdot \frac{v_j - v_i}{l_{ij}^2}$$

**c) Desplazamientos  $u_i$ ;  $u_j$  según eje x**



Aplicamos desplazamientos  $u_i$   $u_j$ , siendo además nulos los desplazamientos:

$$w_i = w_j = v_i = v_j$$

El alargamiento de la barra está dado por:

$$\Delta u_{ij} = u_j - u_i$$

Por equilibrio se cumple:  $N_i = -N_j$

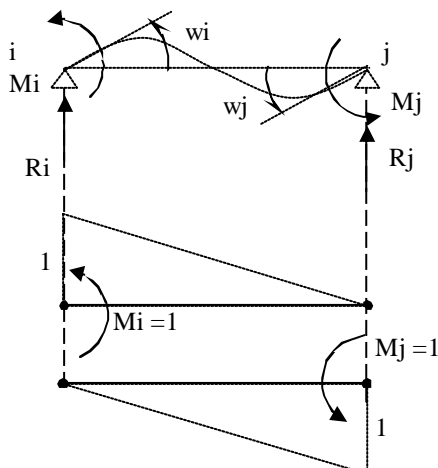
$$\Delta u_{ij} = \int_0^{l_{ij}} \frac{N_j}{\Omega_{ij} \cdot E} \cdot dx = N_j \cdot \int_0^{l_{ij}} \frac{dx}{\Omega_{ij} \cdot E} = u_j - u_i$$

$$N_j = -N_i = \frac{\Delta u_{ij}}{\int_0^{l_{ij}} \frac{dx}{\Omega_{ij} \cdot E}} = \frac{(u_j - u_i)}{\int_0^{l_{ij}} \frac{dx}{\Omega_{ij} \cdot E}}$$

**3.3.2- LA BARRA RECTA DE RIGIDEZ CONSTANTE**

Analicemos la misma barra recta anterior para el caso particular de que a lo largo de toda la longitud  $E$ ;  $\Omega_{ij}$ ;  $I_{ij}$  son constantes:

**a) Rotaciones  $w_i$ ;  $w_j$**



Para este caso particular es inmediato:

$$\delta_{ii} = \int_0^{l_{ij}} \frac{M_i \cdot M_i}{E \cdot I_{ij}} dx = \int_0^{l_{ij}} \frac{M_j \cdot M_j}{E \cdot I_{ij}} dx = \delta_{jj} = \frac{l_{ij}}{3E \cdot I_{ij}}$$

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \int_0^{l_{ij}} \frac{M_i \cdot M_j}{E \cdot I_{ij}} dx = -\frac{l_{ij}}{6E \cdot I_{ij}}$$

$$|\delta_{ij}| = \frac{l_{ij}^2}{12E^2 I_{ij}^2}$$

Siendo entonces:

$$k_{ii} = k_{jj} = 4 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}}$$

$$k_{ij} = k_{ji} = 2 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}}$$

y por lo tanto:

$$w_i = \frac{l_{ij}}{3EI_{ij}} M_i - \frac{l_{ij}}{6EI_{ij}} M_j$$

$$w_j = -\frac{l_{ij}}{6EI_{ij}} M_i + \frac{l_{ij}}{3EI_{ij}} M_j$$

y también:

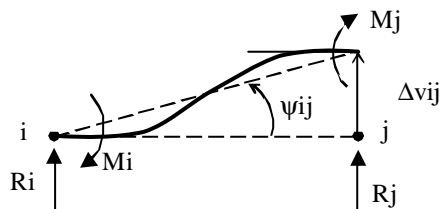
$$M_i = 4 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} w_i + 2 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} w_j$$

$$M_j = -2 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} w_i + 4 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} w_j$$

$$R_i = -R_j = 6 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^2} w_i + 6 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^2} w_j$$

### b) Desplazamientos $v_i, v_j$ según eje $y$

Remplazando los  $k$  en 3.3.1-b)

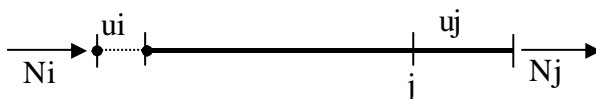


$$M_i = -6 \frac{E \cdot I_{ij}}{l_{ij}^2} \Delta v_{ij} = -6 \frac{E \cdot I_{ij}}{l_{ij}^2} (v_j - v_i) = -6 \frac{E \cdot I_{ij}}{l_{ij}} \psi_{ij}$$

$$M_j = -6 \frac{E \cdot I_{ij}}{l_{ij}^2} \Delta v_{ij} = -6 \frac{E \cdot I_{ij}}{l_{ij}^2} (v_j - v_i) = -6 \frac{E \cdot I_{ij}}{l_{ij}} \psi_{ij}$$

$$R_i = -R_j = -12 \frac{E \cdot I_{ij}}{l_{ij}^3} \Delta v_{ij} = -12 \frac{E \cdot I_{ij}}{l_{ij}^3} (v_j - v_i) = -12 \frac{E \cdot I_{ij}}{l_{ij}^2} \psi_{ij}$$

### c) Desplazamientos $u_i, u_j$ según eje $x$



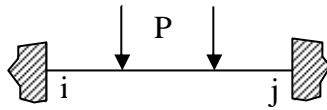
$$\text{Será: } \int_0^{l_{ij}} \frac{dx}{E\Omega_{ij}} = \frac{l_{ij}}{E\Omega_{ij}}$$

$$\Delta u_{ij} = u_j - u_i = N_j \cdot \frac{l_{ij}}{E\Omega_{ij}}$$

$$N_j = -N_i = \frac{E\Omega_{ij}}{l_{ij}} \cdot \Delta u_{ij} = \frac{E\Omega_{ij}}{l_{ij}} \cdot (u_j - u_i)$$

Analizada la barra  $i-j$  bajo distintos tipos de acciones pasaremos a continuación al planteo del Método para la solución de sistemas hiperestáticos.

### 3.4- EL MÉTODO DE LAS DEFORMACIONES



Consideremos una barra  $ij$  de la estructura empotrada elásticamente en los dos nudos y analicémosla para distintos casos de cargas o acciones a los que pueda estar sometida, como ser las cargas exteriores que actúan sobre el tramo y las acciones (deformaciones o solicitaciones) que le transmitan los nudos.

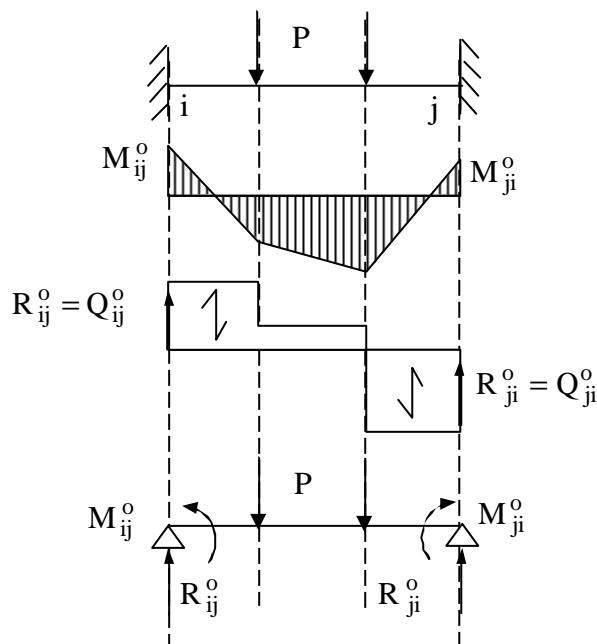
Al efecto de una mejor percepción del fenómeno pensemos que en el plano cada uno de los extremos tiene tres grados de libertad o posibilidad de desplazamiento:

- Una rotación  $w$  que produce momentos flectores y esfuerzos de corte.
- Un desplazamiento  $v$  que produce momentos flectores y esfuerzos de corte.
- Un desplazamiento  $u$  que produce esfuerzos normales

Al igual que en el Método de las Fuerzas despreciamos la influencia del esfuerzo Normal en el estado de deformaciones, y por lo tanto (cuando se plantea en forma manual el método) no tendremos en cuenta el punto c.

Por último explicitemos que al existir cargas en el tramo se producirán solicitaciones en la barra, independientemente de las que se produzcan por la acción de los nudos  $i-j$ .

#### 3.4.1- BARRA EMPOTRADA BAJO CARGAS EN EL TRAMO



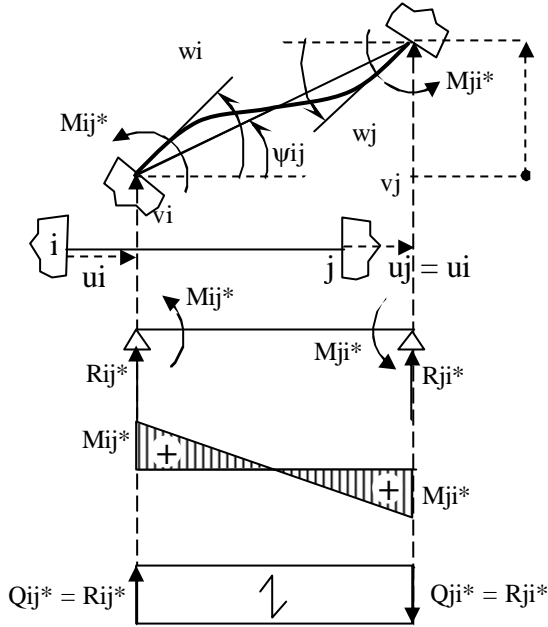
A partir de aquí consideramos solo el caso de la barra de sección constante, a sea,  $EI_{ij} = \text{cte.}$ ;  $\Omega_{ij} = \text{cte.}$  para, mas adelante, considerar en forma especial el caso de barras acarteladas.

Con el fin de superponer efectos, en primer lugar, supongamos una barra perfectamente empotrada en sus extremos (deformaciones nulas en los nudos) y sometida a cargas  $P$  externas en los tramos.

Denominaremos como  $M_{ij}^0; M_{ji}^0$  los momentos en los nudos y con  $Q_{ij}^0; Q_{ji}^0$  los esfuerzos de corte o reacciones en dichos extremos. La ultima figura representa una barra equivalente en la cual los  $M_{ij}^0; M_{ji}^0; R_{ij}^0; R_{ji}^0$  pueden ser obtenidos de

tablas o manuales para los estados de cargas más usuales y en función de ellas se pueden obtener a lo largo de la barra las solicitaciones: Momentos flectores, esfuerzos de corte y normales de la barra doblemente empotrada.

**3.4.2- LA BARRA BAJO DESPLAZAMIENTOS  $u, v, w$**



Al no considerar deformaciones debido a esfuerzos normales la longitud  $l_{ij}$  de la barra no varia al igual que  $u_i = u_j$ . En cambio  $w_i, w_j$  y  $\psi_{ij} = \frac{v_j - v_i}{l_{ij}}$  producirán solicitaciones que señalaremos con un \* que valorizaremos según (3.3.2) a) y b).

$$M_{ij}^* = 4 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} w_i + 2 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} w_j - 6 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} \psi_{ij}$$

$$M_{ji}^* = 2 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} w_i + 4 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} w_j - 6 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} \psi_{ij}$$

$$R_{ij}^* = -R_{ji}^* = 6 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^2} w_i + 6 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^2} w_j - 12 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^2} \psi_{ij}$$

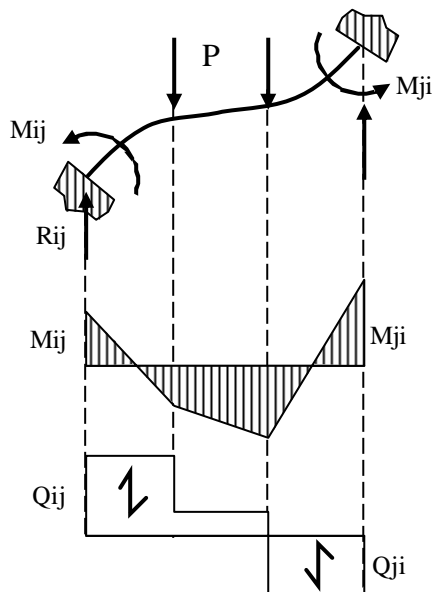
o bien:

$$M_{ij}^* = 2 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} [2w_i + w_j - 3\psi_{ij}]$$

$$M_{ji}^* = 2 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} [w_i + 2w_j - 3\psi_{ij}]$$

$$\frac{M_{ij}^* + M_{ji}^*}{l_{ij}} = R_{ij}^* = -R_{ji}^* = Q_{ij}^* = Q_{ji}^* = 6 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^2} [w_i + w_j - 2\psi_{ij}]$$

**3.4.3- LA BARRA BAJO CARGAS EN EL TRAMO Y DESPLAZAMIENTOS  $u, v, w$**



Bajo un estado simultaneo de acciones como las tratadas en 3.4.1 y 3.4.2 por aplicación del principio de superposición, obtendremos las solicitaciones en los extremos:

$$M_{ij} = M_{ij}^o + 2 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} [2w_i + w_j - 3\psi_{ij}]$$

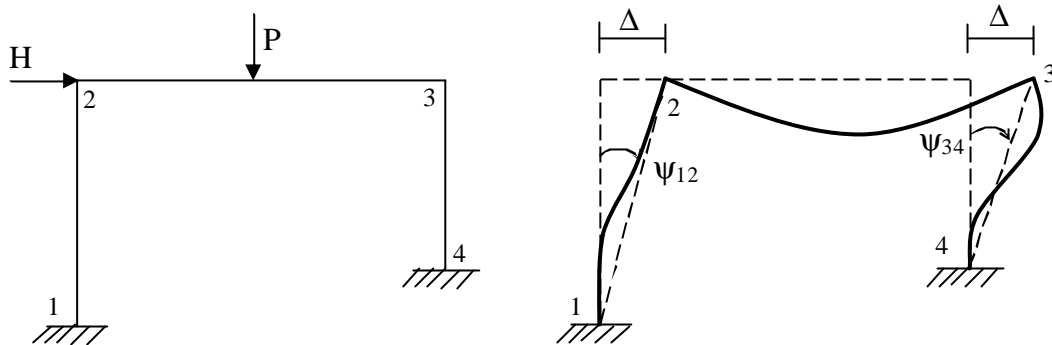
$$M_{ji} = M_{ji}^o + 2 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} [w_i + 2w_j - 3\psi_{ij}]$$

$$Q_{ij} = Q_{ij}^o + 6 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^2} [w_i + w_j - 2\psi_{ij}]$$

$$Q_{ji} = Q_{ji}^o + 6 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^2} [w_i + w_j - 2\psi_{ij}]$$

Expresiones que nos servirán para el planteo de ecuaciones de equilibrio en el desarrollo del Método de las Deformaciones.



**3.5- PLANTEO MANUAL DEL MÉTODO DE LAS DEFORMACIONES**

Al igual que lo hicimos con el Método de las Fuerzas, desarrollaremos el presente método sobre un pórtico plano como el de la figura sometido a un estado de cargas P y H. En este tomaremos como incógnitas los desplazamientos y rotaciones existentes, respetando las convenciones de signos ya enunciadas con anterioridad.

Nótese que en este método nuestras incógnitas (desplazamientos) son geométricas, mientras que en el método de las fuerzas las incógnitas eran fuerzas o solicitaciones.

Existen 4 nudos y tres barras, y por lo tanto podría n a llegar a existir las rotaciones:  $w_1, w_2, w_3, w_4$  y  $\psi_{12}, \psi_{23}, \psi_{34}$  de las cuales podemos eliminar:

$$w_1 = 0 \quad (\text{empotramiento})$$

$$w_4 = 0 \quad (\text{empotramiento})$$

$$\psi_{23} = 0 \quad (\text{no existe rotaciones de la barra 2-3 pues los desplazamientos de los nodos 2 y 3 son horizontales}(v = 0) \text{ por la hipótesis indeformabilidad bajo esfuerzos normales de las barras 1-2 y 3-4).}$$

Quedan entonces únicamente las incógnitas:

$$w_2 \quad w_3 \quad \psi_{12} \quad \psi_{34}$$

De la indeformabilidad axial de (2-3) los desplazamientos horizontales de los nudos 2 y 3 son iguales ( $\Delta$ ), por lo cual:

$$\Delta = \psi_{34} \cdot l_{34} = \psi_{12} \cdot l_{12} \quad \psi_{34} = \frac{l_{12}}{l_{34}} \psi_{12} = \eta_{34} \cdot \psi_{12}$$

con lo cual sólo quedan 3 incógnitas independientes:

$$w_2 \quad w_3 \quad \psi_{12}$$

Necesitamos entonces 3 ecuaciones para resolver nuestro problema. Por economía de escritura denominaremos con  $k_{ij}^0 = \frac{EI_{ij}}{l_{ij}}$

El método consiste en poner las solicitaciones en función de los desplazamientos (rotaciones incógnitas) y luego plantear las ecuaciones de equilibrio que nos permitan formar un

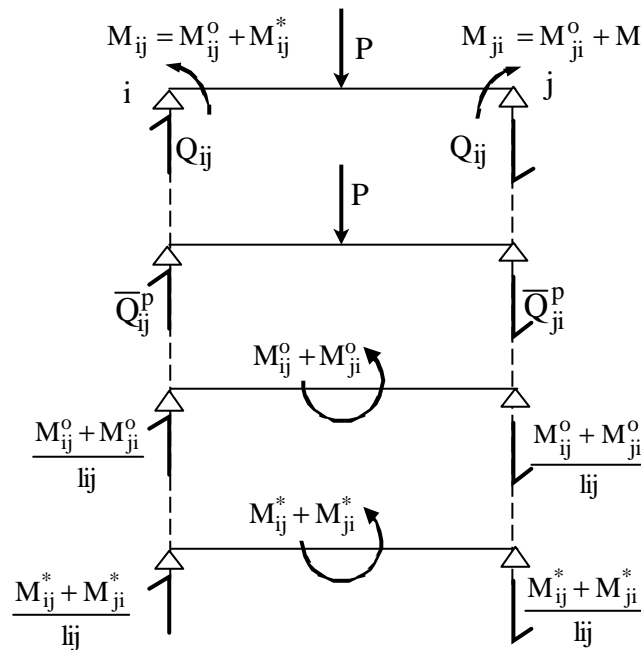
sistema de ecuaciones del cual despejar las incógnitas ( $w$ ,  $\psi$ ) y a partir de ellas obtener el valor de las solicitaciones. Veamos como aplicamos esto último a nuestra estructura.

$$\text{Barra 1-2} \begin{cases} M_{12} = M_{12}^0 + 2k_{12}^0 [w_2 - 3\psi_{12}] \\ M_{21} = M_{21}^0 + 2k_{12}^0 [2w_2 - 3\psi_{12}] \end{cases}$$

$$\text{Barra 2-3} \begin{cases} M_{23} = M_{23}^0 + 2k_{23}^0 [2w_2 + w_3] \\ M_{32} = M_{32}^0 + 2k_{23}^0 [w_2 + 2w_3] \end{cases}$$

$$\text{Barra 3-4} \begin{cases} M_{34} = M_{34}^0 + 2k_{34}^0 [2w_3 - 3\eta_{34}\psi_{12}] \\ M_{43} = M_{43}^0 + 2k_{34}^0 [w_3 - 3\eta_{34}\psi_{12}] \end{cases}$$

Analicemos que pasa con los esfuerzos de corte en la barra  $ij$ , en la cual el esfuerzo de corte total según nuestra convención de signos será (con  $\bar{Q}_{ij}^P$ ;  $\bar{Q}_{ji}^P$  es esfuerzo de corte en los extremos de la barra simplemente apoyada bajo cargas  $P$ )



$$Q_{ij} = \bar{Q}_{ij}^P + \frac{M_{ij} + M_{ji}}{l_{ij}}$$

$$Q_{ji} = \bar{Q}_{ji}^P + \frac{M_{ij} + M_{ji}}{l_{ij}}$$

$$\uparrow > 0$$

En las barras 1-2 y 3-4

$$Q_{21} = \bar{Q}_{12}^P + \frac{1}{l_{12}} [M_{12}^0 + M_{21}^0 + 2k_{12}^0 (3w_2 - 6\psi_{12})]$$

$$Q_{34} = \bar{Q}_{34}^P + \frac{1}{l_{34}} \left[ M_{34}^0 + M_{43}^0 + 2k_{34}^0 (3w_3 - 6\eta_{34} \psi_{12}) \right]$$

En nuestro caso particular en las barras 1-2 y 3-4 por no haber cargas en el tramo de las barras  $\bar{Q}_{21}^P; \bar{Q}_{34}^P$  son nulos y por lo tanto, como también son nulos  $M_{21}^0; M_{12}^0; M_{34}^0; M_{43}^0$ :

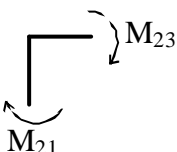
$$Q_{21} = 2 \frac{k_{12}^0}{l_{12}} [3w_2 - 6\psi_{12}]$$


$$Q_{34} = 2 \frac{k_{34}^0}{l_{34}} [3w_3 - 6\eta_{34} \psi_{12}]$$

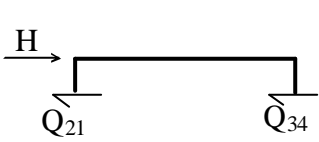
De tablas obtenemos:

$$M_{23}^0 = \frac{P \cdot l_{23}}{8} \quad M_{32}^0 = -\frac{P \cdot l_{23}}{8}$$

Planteemos ahora las condiciones de equilibrio:

a)   $M_{21} + M_{23} = 0$  (suma de momentos en el nudo 2)  
 $2k_{12}^0 (2w_2 - 3\psi_{12}) + M_{23}^0 + 2k_{23}^0 (2w_2 + w_3) = 0$

b)   $M_{32} + M_{34} = 0$  (suma de momentos en el nudo 3)  
 $M_{32}^0 + 2k_{23}^0 (2w_2 + w_3) + 2k_{34}^0 (2w_3 - 3\eta_{34} \psi_{12}) = 0$

c)   $H - Q_{21} - Q_{34} = 0$  (suma de las fuerzas horizontales)  
 $H - 2 \frac{k_{12}^0}{l_{12}} (2w_3 - 6\psi_{12}) - 2 \frac{k_{34}^0}{l_{34}} (3w_3 - 6\eta_{34} \cdot \psi_{12}) = 0$

De a) b) y c) obtengo entonces 3 ecuaciones con 3 incógnitas  $w_1, w_2,$  y  $\psi_{12}$

$$a) \quad (4k_{12}^0 + 4k_{23}^0)w_2 + 2k_{23}^0 w_3 - 6k_{12}^0 \psi_{12} + M_{23}^0 = 0$$

$$b) \quad 2k_{23}^0 w_2 + (4k_{23}^0 + 4k_{34}^0)w_3 - 6k_{34}^0 \eta_{34} \psi_{12} + M_{32}^0 = 0$$

$$c) \quad -6 \frac{k_{12}^0}{l_{12}} w_2 - 6 \frac{k_{34}^0}{l_{34}} w_3 + \left( 12 \frac{k_{12}^0}{l_{12}} + 12 \frac{k_{34}^0}{l_{34}} \eta_{34} \right) \psi_{12} + H = 0$$

De este sistema podré calcular  $w_1, w_2, \psi_{12}$  que aplicadas a las ecuaciones que nos dan los  $M_{ij}$  en los extremos de las barras nos permiten obtener:

$$M_{12} \quad M_{21} \quad M_{23} \quad M_{32} \quad M_{34} \quad M_{43}$$

y con estos los diagramas de solicitaciones M, Q y N, objetivo del método analizado.

Es conveniente explicitar que siempre mediante cortes apropiados podemos analizar equilibrio de nudos y otros sectores de la estructura de forma tal de poder plantear un sistema normal de ecuaciones lineales que nos permita el cálculo de la totalidad de las incógnitas (geométricas).

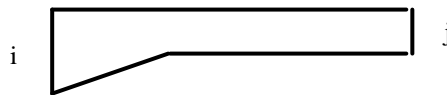
Más adelante volveremos sobre el tema para un planteo mas general y sistemático con la utilización de matrices con el objeto de su procesamiento por computadoras.

### **3.6- METODO DE LAS DEFORMACIONES PARA ESTRUCTURAS ACARTELADAS**

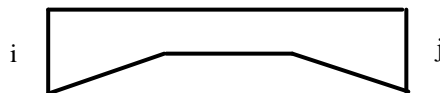
En nuestro curso identificaremos como estructuras acarteladas a los sistemas que están compuestos por barras con secciones cuyo momento de inercia es variable en parte o en todo el tramo de la barra. Los casos que analizaremos son los de cartela recta. Se puede hacer extensivo a otros casos, como el de cartela parabólica. [Ejemplo de esto último, Puente sobre el río Negro en el acceso a Puerto Tirol].

Tomaremos en cuenta solamente las dos siguientes situaciones:

Cartela Simple:



Cartela Doble (Simétrica)



En ambos casos la sección es rectangular. El ancho b es constante en toda la longitud de la barra; varía la altura.

El presente estudio consistirá en enunciar las expresiones a utilizar y aprender el uso de Tablas que tienen en cuenta la condición de inercia variable. Utilizaremos la nomenclatura y tablas del libro “Cálculo de estructuras por el Método de Cross”, de C. Prenzlou.

En este capítulo habíamos encontrado las siguientes expresiones que vinculan las solicitaciones extremas de barras con las rotaciones de los nudos y la rotación de la barra.

Por rotación de nudos:

$$M_i = k_{ii} \cdot w_i + k_{ij} \cdot w_j$$

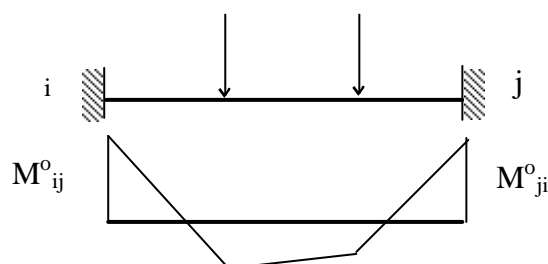
$$M_j = k_{ji} \cdot w_i + k_{jj} \cdot w_j$$

Por rotación de barra:

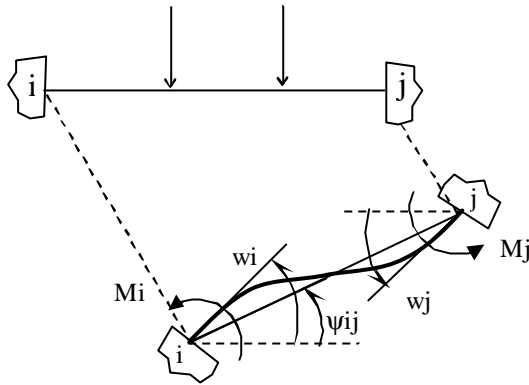
$$M_i = -(k_{ii} + k_{ij}) \phi_{ij}$$

$$M_j = -(k_{ji} + k_{jj}) \phi_{ij}$$

Por carga de tramo, considerando los extremos empotrados, en los vínculos Nudo-Barra se producen momentos por empotramiento perfecto, que identificamos como  $M_{ij}^o$  y  $M_{ji}^o$ .



Si además de carga de tramo, se producen rotación de nudos y rotación de barra, por aplicación del Principio de Superposición de Efectos, en cada extremo tendremos la siguiente sollicitación:



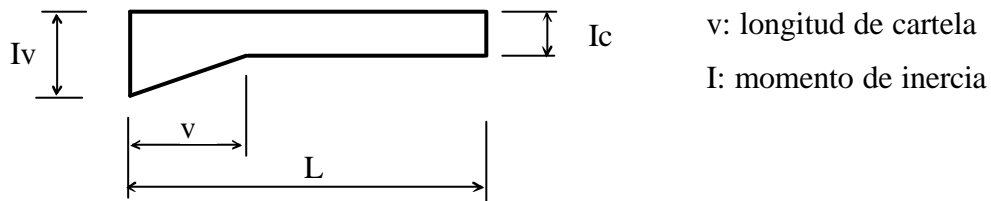
$$M_i = M^{\circ}ij + k_{ii} \cdot w_i + k_{ij} \cdot w_j - (k_{ii} + k_{ij}) \phi_{ij}$$

$$M_j = M^{\circ}ji + k_{ji} \cdot w_i + k_{jj} \cdot w_j - (k_{ij} + k_{jj}) \phi_{ij}$$

En el caso de tramos acartelados, en función del tipo de cartela, de sus relaciones geométricas, existen tablas donde encontrar coeficientes, a través de los cuales se pueden determinar los siguientes parámetros:

- a) Momentos de Empotramiento Perfecto ( $M^{\circ}$ ).
- b) Rigideces k.

En base a la siguiente figura, veamos como se obtienen y usan esos coeficientes:



v: longitud de cartela  
I: momento de inercia

Para utilizar las tablas, debemos conocer las siguientes relaciones:

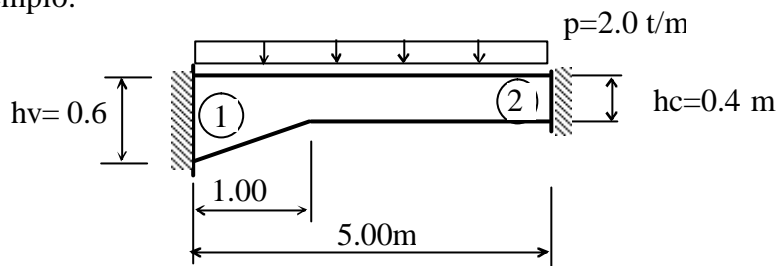
$$a = \frac{v}{L} \quad ; \quad i = \frac{I_c}{I_v}$$

Con los valores de **a**, **i**, entramos a tabla y sacamos los siguientes coeficientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} r \text{ (para carga uniforme)} \\ \eta \text{ (para carga puntual)} \end{array} \right\} \text{ permite calcular los } M^{\circ}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k \\ m \end{array} \right\} \text{ permite calcular los } k_{ij}$$

Utilicemos las Tablas del Prenzlow para determinar los coeficientes en base al siguiente ejemplo:



De Tabla 3  $\Rightarrow$  p/calcular Mto. de Empotramiento Perfecto:

$$r_1 = 0,1057 \Rightarrow M^{\circ}_{12} = r_1 \cdot p \cdot l^2 = 0,1057 \times 2,0 \times 5^2 = 5,29 \text{ tm}$$

$$r_2 = 0,0731 \Rightarrow M^{\circ}_{21} = r_2 \cdot p \cdot l^2 = 0,0731 \times 2,0 \times 5^2 = 3,66 \text{ tm}$$

Los valores de  $M^{\circ}$  deben acompañarse con signos, acordes con la convención adoptada en la materia.

De Tabla 6  $\Rightarrow$  p/calcular Rigideces.

$$k_1 = 1,39$$

$$m_1 = 0,484$$

De Tabla 7  $\Rightarrow$  p/calcular Rigideces.

$$k_2 = 1,08$$

$$m_2 = 0,624$$

Con los coeficientes  $k$  y  $m$  obtenidos de tabla, calculamos los  $k_{ij}$ :

$$k_{11} = 4 k_1 \frac{EIc}{L} = 4 \times 1,39 \times \frac{(E.b)}{12} \cdot \frac{0,40^3}{5,00} = 0,071 \frac{(E.b)}{12}$$

Al producto  $\frac{(E.b)}{12}$ , constante para la barra, lo identificamos como  $(C_{12})$ .

$$K_{22} = 4 k_2 \frac{EIc}{L} = 4 \times 1,08 \times (C_{12}) \cdot \frac{0,40^3}{5,00} = 0,055 (C_{12})$$

$$K_{12} = 4 k_1 m_1 \frac{EIc}{L} = 4 \times 1,39 \times 0,484 \times (C_{12}) \cdot \frac{0,40^3}{5,00} = 0,035 (C_{12})$$

$$K_{21} = 4 k_2 m_2 \frac{EIc}{L} = 4 \times 1,08 \times 0,624 \times (C_{12}) \cdot \frac{0,40^3}{5,00} = 0,035 (C_{12})$$

Los Momentos Extremos para nuestra barra serán:

$$M_1 = + 5,29 + 0,071 (C_{12} \cdot w_1) + 0,035 (C_{12} \cdot w_2) - (0,106) (C_{12} \cdot \phi_{12})$$

$$M_2 = -3,66 + 0,035 (C_{12} \cdot w_1) + 0,055 (C_{12} \cdot w_2) - 0,09 (C_{12} \cdot \phi_{12})$$

Si el ancho **b** fuera constante para todas las barras de la estructura, en la hipótesis de que el material es el mismo, podemos hacer:

$$C_{ij} \cdot w_i = w^*_{ij}$$

$$\text{Por lo que: } M_1 = + 5,29 + 0,071 w^*_{11} + 0,035 w^*_{12} - 0,106 \varphi^*_{12}$$

$$M_2 = - 3,66 + 0,035 w^*_{11} + 0,055 w^*_{12} - 0,090 \varphi^*_{12}$$

Resuelto el sistema de ecuaciones, los valores que obtengamos para las incógnitas no serán los verdaderos valores de las rotaciones; estarán afectados por la constante del producto (E.b/12). Pero las cifras que hallemos para momentos extremos sí serán correctas, que es lo que nos interesa conocer.

Normalmente los valores que obtenemos para las relaciones **a**, **i**, no coinciden con los existentes en las tablas. En ese caso se interpola linealmente.

Una vez conocidas las relaciones entre los momentos extremos y las incógnitas para c/u de las barras, tal como lo vimos en el punto 3.5 (Planteo manual del método), debemos proponer las ecuaciones de equilibrio. Por cada Nudo que rota, una condición de  $\sum M_{ij} = 0$ ; por cada Piso que se desplaza, una condición de  $\sum F_{zas} = 0$ . Recordamos que se mantiene la hipótesis de indeformabilidad de las barras por esfuerzo normal.